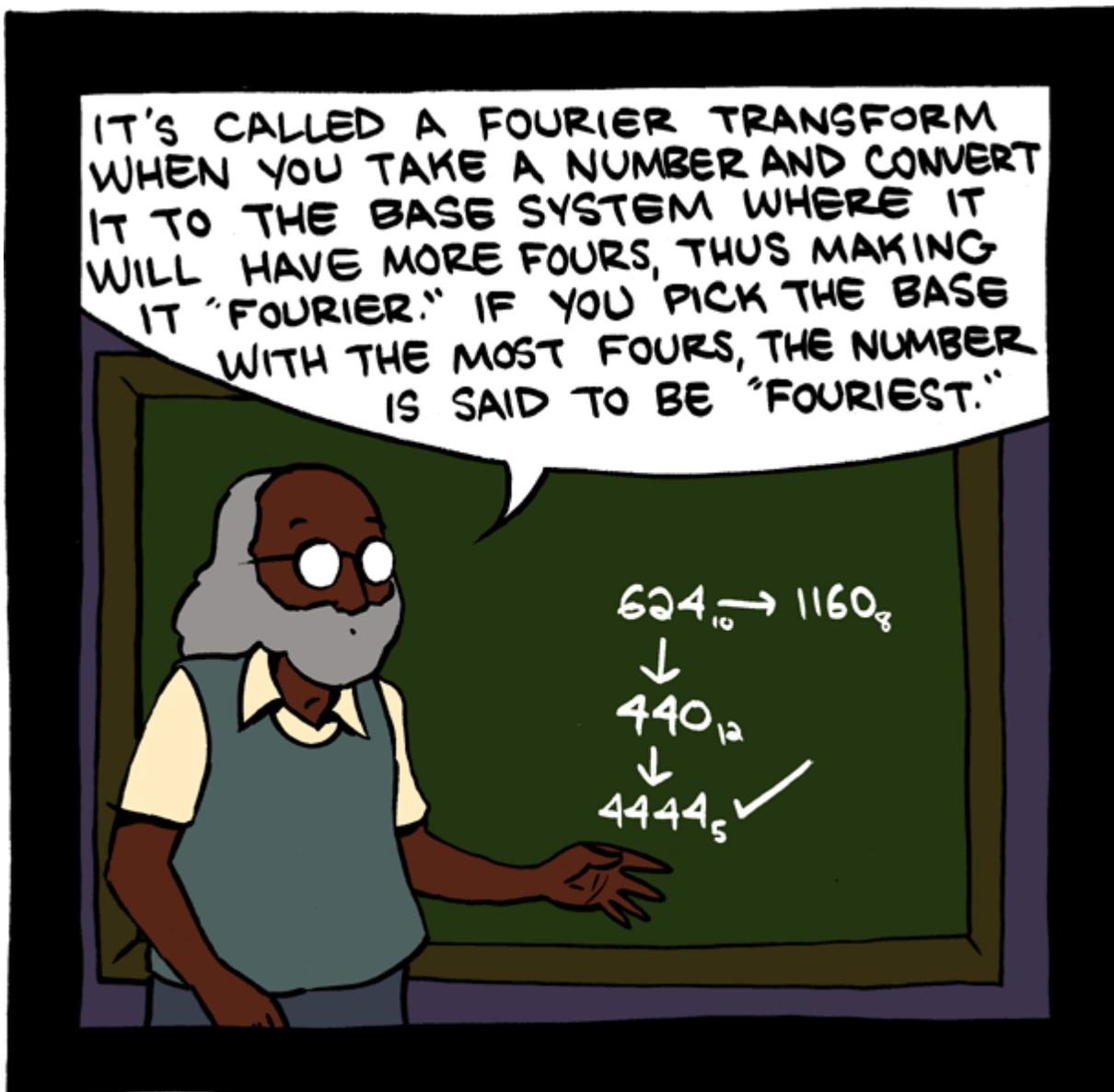


# Modellierung WS 22-23 Blatt 9

Abgabe: 20.01.23 23:59 auf Mattermost oder per Mail an jadissel



Teaching math was way more fun after tenure.

<https://www.smbc-comics.com/comic/2013-02-01>

## Aufgabe 1 - Fourier Mathematik

Wir haben in der Vorlesung die *Fourier-Transformation* einer Funktion kennengelernt.

Wir wollen ein bisschen mit der Fourier transformation rechnen, da sie eins der wichtigsten werkzeuge der Wissenschaft ist.

Erinnerung: Die Fourier-Transformation einer funktion  $f(x)$  ist gegeben durch:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \omega} dx$$

Die Fourier-Transformation ist eine lineare Funktion.

1. Berechne die Fourier-Transformation der Funktion  $f(x) = e^{-2\pi i x a}$ . Ihr solltet hier die dirac delta Funktion  $\delta(x + a) = \begin{cases} \infty & \text{für } x = a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$  als Ergebnis erhalten.
2. Was ist dann die Fourier-Transformation des dirac deltas?

Sinus und Cosinus lassen sich durch die e-Funktion darstellen:

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

3. Berechne die Fourier-Transformation der Funktion  $f(x) = \cos(2\pi\alpha x)$  mithilfe von 1) und 2).
4. Berechne die Fourier-Transformation der Funktion  $f(x) = \sin(2\pi\alpha x)$ .

Wir wollen das Faltungstheorem nutzen um eigenschaften von  $\cos(2\pi\alpha x)^k$  zu untersuchen.

Zur Erinnerung:

$$f \cdot g = F^{-1} (F(f) \otimes F(g))$$

Wir können also das produkt von zwei Funktionen durch mehrfaches anwenden der Fourier-Transformation und einer Faltung berechnen.

5. Berechne die Faltung von  $\frac{1}{2}[\delta(\alpha - x) + \delta(\alpha + x)]$  mit sich selbst. Es genügt dies "Graphisch" zu machen wenn euch das einfacher fällt.
6. Berechne die Fourier-Transformation des Ergebnisses aus 5). Da die Fourier-Transformation linear ist, können die Ergebnisse aus aufgabe 4) wiederverwendet werden.
7. Begründe:  $\cos(x)^n$  lässt sich darstellen als Funktion aus  $\cos(nx), \cos((n-1)x), \dots, \cos(x), 1$ .
8. (Wie sieht das ganze bei  $\sin(x)^n$  aus?)

---

## Aufgabe 2 - Fourier in numpy

Integrale sind doof, deswegen haben wir PCs. Wir wollen sampling und Fouriertransformation von Bildern in numpy untersuchen. Ladet die zip herunter und bearbeitet die Aufgaben im notebook.