

# Modellierung WS 22-23 Blatt 7

Abgabe: 23.12.22 23:59 (uffi) auf Mattermost oder per Mail an jadissel

## Aufgabe 1

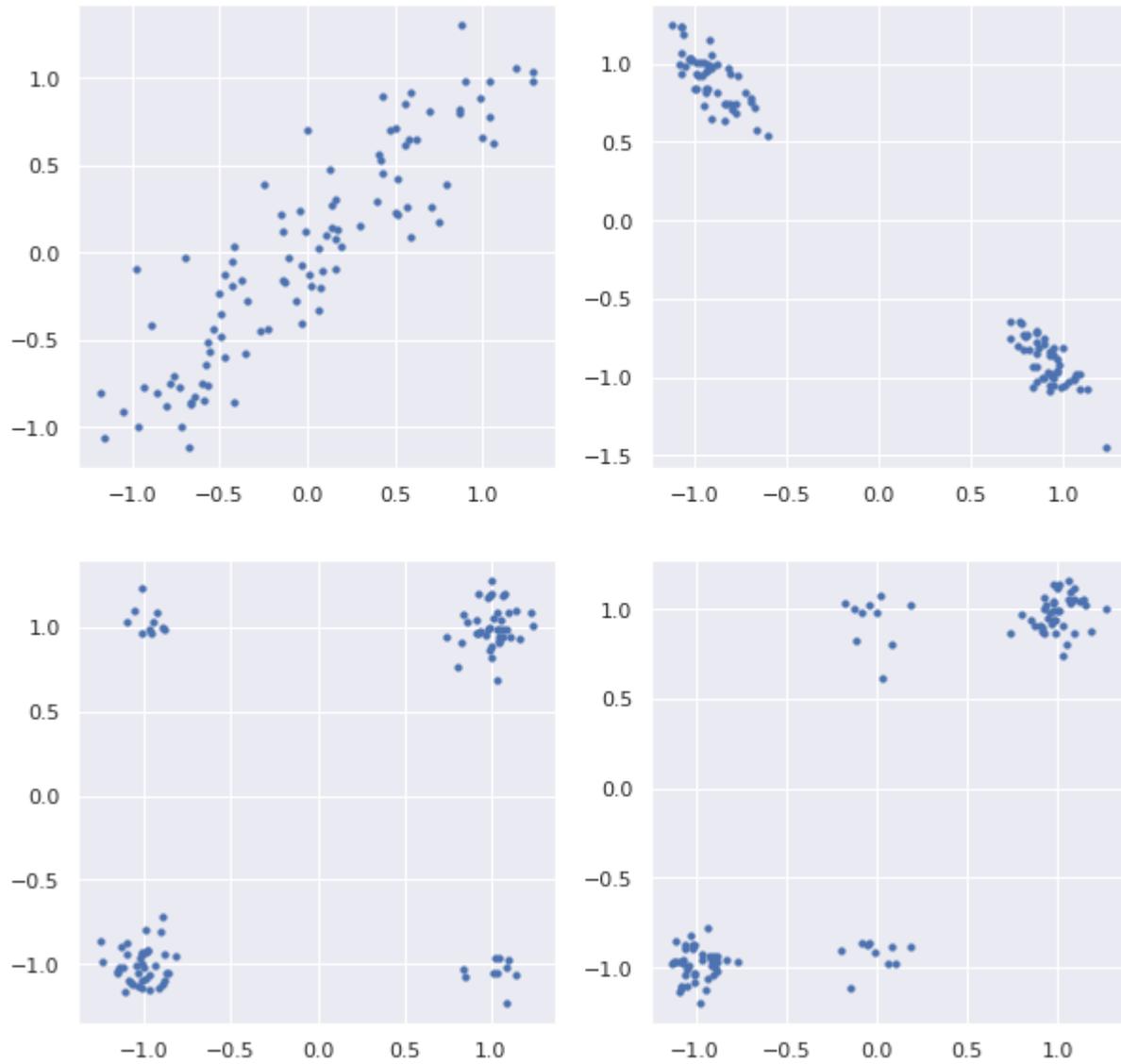
Sei  $A$  eine symmetrische, invertierbare  $n \times n$  matrix, d.h. dass  $A^t = A$ , und  $A^{-1}$  existiert.

Seien  $v, w$  zwei Eigenvektoren zu  $A$  mit Eigenwerten  $\lambda, \mu$  und  $\lambda \neq \mu$

1. Zeige dass  $v^t \cdot w = 0$ , also dass  $v$  und  $w$  orthogonal zueinander stehen.
2. Sei nun  $\lambda = \mu$ , aber  $v \neq w$ . Zeige, dass zwei Eigenvektoren  $v', w'$  existieren die den Eigenwert  $\lambda$  haben, aber orthogonal zueinander stehen.
3. Begründe: Existieren  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren, so können wir eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren bilden. (Wieso vereinfacht dies viele komplexe Rechnungen?)
4. Folgere: Die Hauptkomponenten der PCA einer Punktwolke stehen orthogonal aufeinander

## Aufgabe 2

Zeichne für folgende Punktwolken den Mean, die erste und die zweite Hauptkomponente ein. (Also die Richtungen höchster Varianz)



Auf der Vorlesungswebsite findet Ihr das Skript welches diese Punktwolken erzeugt. Füllt die Funktion `calculate_svd` aus, und vergleicht die Ergebnisse mit eurer Schätzung.

## Aufgabe 3

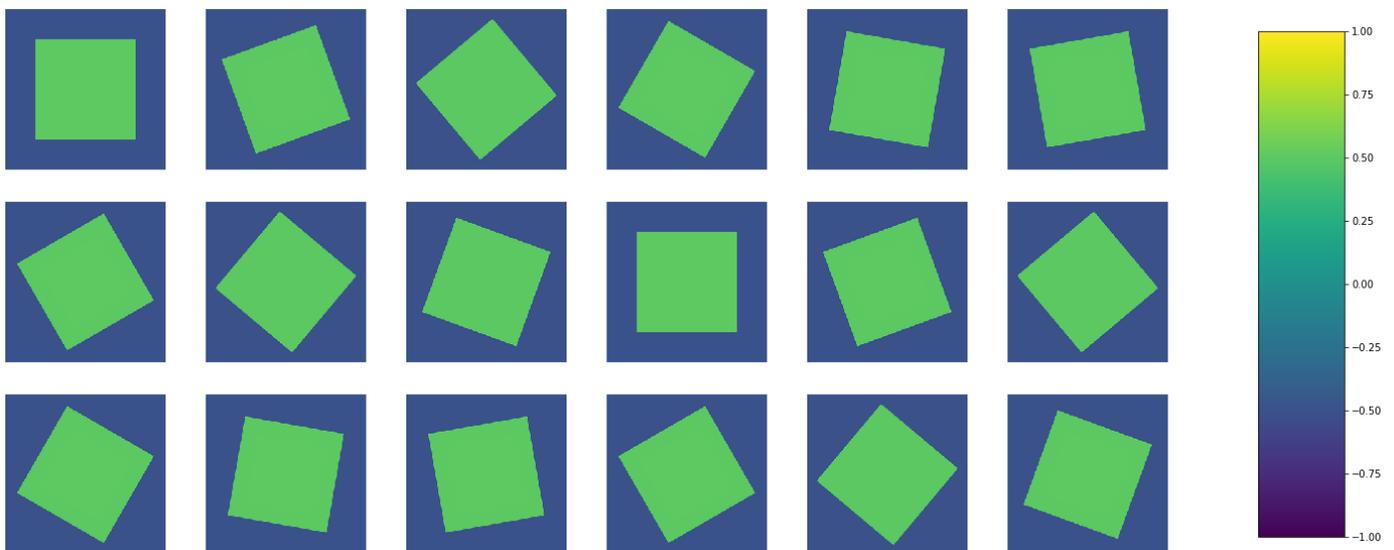
Mit dem folgenden Codeschnipsel wurden 360 Bilder von Quadraten erzeugt, jeweils um einen anderen Winkel gedreht.

```
import scipy
import numpy as np
from sklearn.decomposition import PCA

def create_rectangles():
    arr = np.zeros((256,256))
    n=80
    arr[128-n:128+n,128-n:128+n] = 1
    arr = arr - 0.5
    results = []
    for i in range(360):
        results.append(scipy.ndimage.rotate(arr, i, reshape=False))
    return results

rects = np.array(create_rectangles())
```

Hier sieht ihr ein paar Beispiele:



Begründe informell warum in der folgenden Reihe Bilder

- Das obere linke Bild die Richtung der größten Varianz darstellt (erste Hauptkomp.)
- Das Bild rechts davon eine Hauptkomponente ähnlich großer Varianz darstellt die orthogonal zu ersten ist
- Alle Bilder orthogonal zueinander stehen

