

Modellierung WS 22-23 Blatt 5

Aufgabe 1: Eigenwerte und Fibonacci

Wir wollen in dieser Aufgabe eine Formel für die n -te Fibonacci Zahl herleiten. Überraschenderweise ist das am einfachsten mit Eigenwerten. Sei f_n die n -te Fibonacci Zahl, mit $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

1. Sei v_i der Vektor bestehend aus der i -ten und $(i+1)$ -ten Fibonacci Zahl, also $v_i = (f_i, f_{i+1})$. Finde eine Matrix A , sodass $Av_i = v_{i+1}$.
2. Finde die beiden Eigenwerte und Eigenvektoren von A
3. Finde eine Zerlegung von A , mit $A = Q\Lambda Q^{-1}$, wobei Λ eine Diagonalmatrix ist.
4. Wie sieht A^n aus? Wie können wir nun einfach die n -te Fibonacci Zahl berechnen?

Aufgabe 2: Eigenvektoren überall

Alice hat zwei Gefäße mit Apfelsaft und Wasser die sie mischen möchte. Das erste Gefäß (A) enthält 10 Liter Apfelsaft und 0 Liter Wasser, während das zweite Gefäß (B) 5 Liter Apfelsaft und 5 Liter Wasser enthält. Sie geht wie folgt vor:

Schritt 1: Wir nehmen 1 Liter aus Gefäß (A) und füllen ihn in Gefäß (B)

Schritt 2: Wir nehmen 1 Liter aus Gefäß (B) und füllen ihn in Gefäß (A)

Die wird dann wiederholt bis alles gut durchmischt ist

Sei nun v ein Vektor, der den Apfelsaftgehalt der Gefäße beschreibt, also am Start $v^t = (1, 0.5)$

1. Finde eine Matrix, die angewandt auf v den 1. Schritt von Alices Mischvorgang beschreibt
2. Finde eine Matrix, die angewandt auf v den 2. Schritt beschreibt
3. Finde eine Matrix, die eine Iteration des Mischvorgangs beschreibt
4. Berechne Eigenwerte und Eigenvektoren dieser Matrix (zum Überprüfen: Die Eigenwerte sollten 1 und 0.8 sein)
5. Berechne eine Singulärwert Zerlegung dieser Matrix
6. Berechne den Apfelsaftgehalt der Gefäße nach unendlich vielen Iterationen

Aufgabe 3: Radon Transformation

Wir wollen eine Inverse Radon Transformation naiv berechnen. Hierzu habt ihr online ein Zip File mit einem Notebook und einem Sinogram (Das Ergebnis einer Radon Transformation)

Das Notebook lädt das Sinogram und stellt euch ein paar Funktionen bereit, die eine naive Radon Transformation berechnen.

1. Überlegt euch, wie ihr die Matrix der Radon Transformation finden könnt. Da die Radon Transformation linear ist, muss diese existieren. Es hilft, sich ein Bild als großen Vektor vorzustellen. Die in dieser Aufgabe verwendete Transformation bildet dann einen $32 * 32$ Vektor auf einen anderen $32 * 32$ Vektor ab. Diese Abbildung ist gegeben durch die Funktion 'radon_vector_zu_vector', aber nicht in Matrix form.
2. Als Nächstes wollen wir das Pseudoinverse dieser Matrix berechnen, indem wir die SVD Zerlegung invertieren und einige Singulärwerte löschen
3. Als Letztes berechnen wir mithilfe der Pseudoinversen das Originalbild und zeigen dieses an.

Damit der Code im Notebook läuft, müsst ihr eventuell das Python package 'pillow' installieren (pip install pillow).