

Modellierung WS 22-23 Blatt 4

Abgabe: 02.12.22 23:59 auf Mattermost oder per Mail an jadissel

Aufgabe 1:

Wir wollen zwischen Punkten interpolieren. Unsere Interpolationskurve soll dabei bestimmte Eigenschaften aufweisen.

Seien hierfür n Punkte im gleichen Abstand gegeben, also $P_1 = (1, y_1), P_2 = (2, y_2), \dots, P_n = (n, y_n)$

Wir suchen eine Funktion $f(x)$, sodass $f(1) = y_1, f(2) = y_2, \dots, f(n) = y_n$.

Hierbei wollen wir f aus vielen kleineren Polynom Funktionen zusammenbauen.

$$f_1 : [1, 2] \rightarrow R$$

$$f_2 : [2, 3] \rightarrow R$$

...

$$f_{n-1} : [n-1, n] \rightarrow R$$

und $f(x)$ ist gegeben durch das kleinste passende f_i

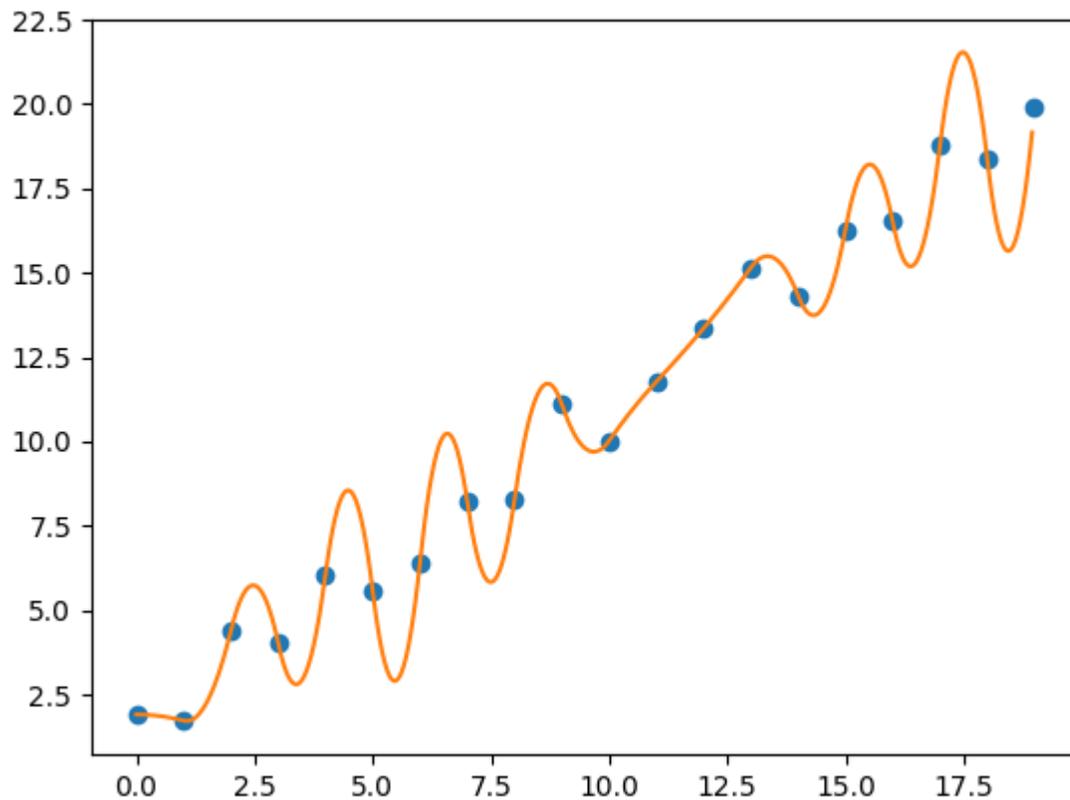
Damit die Funktion f stetig ist, muss jedes f_i stetig sein und zusätzlich muss gelten:

$$f_i(i+1) = f_{i+1}(i+1)$$

1. Finde eine Formel für die f_i die dies erfüllt. Was ist die Formel mit dem kleinsten Polynomgrad die diese Gleichung erfüllt?
2. Wir wollen nun das f zusätzlich *stetig differenzierbar* ist, also dass die Ableitung von f stetig ist.
 - Begründe, dass die f_i hierfür im allgemeinen Grad 2 benötigen
 - An welchen Stellen müssen wir die Stetigkeit der Ableitung überprüfen?
 - Sei nun $f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$. Stelle ein lineares Gleichungssystem auf, dessen Lösung uns die Parameter a_k, b_k, c_k liefert, wenn $a_{k-1}, b_{k-1}, c_{k-1}$ bekannt sind

3. Begründe dass wir für *n*-fach stetige Differenzierbarkeit einen Polynomgrad von $n + 1$ benötigen

Der folgende Plot zeigt eine solche Interpolation mit *stetiger differenzierbarkeit*. Hierbei interpolieren wir Punkte die auf einer Geraden liegen, jedoch ein wenig verrauscht sind. Warum ist dies oft eine schlechte Interpolation? Warum funktionieren in der Praxis *B-splines* besser?



(Den Code um diesen Plot zu erzeugen findet ihr auf der Vorlesungswebsite)

Aufgabe 2:

Wir wollen ein paar Implizite und Explizite Funktionen implementieren.

Ladet hierzu das Python Skript von der Vorlesungswebsite herunter und füllt die fehlenden Funktionen aus.

Das Ergebnis sollte in etwa so aussehen:

