

# Zusatzblatt Weighted Least Squares

## Rechenaufgaben

### Aufgaben U

Wir wollen Least Square Lösungen für bestimmte Funktionen berechnen, wobei ein Datenpunkt besonders gewichtet wird. Wir orientieren uns hierbei an dem Algorithmus der Vorlesung. Link

**Aufgabe U1** Gegeben sind die Messpunkte  $(x_1, y_1) = (-2, 3)$ ,  $(x_2, y_2) = (-1, -3)$ ,  $(x_3, y_3) = (0, 1)$  und die Funktionen  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = x^2$

Wir wollen den Punkt  $x_2$  mit einem Faktor von  $w_2 = 2$  gewichten. Die restlichen Punkte gewichten wir mit 1.

Berechne die Koeffizienten  $a_1$  und  $a_2$  der Funktion  $f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$ , die die Messpunkte am besten im Least Squares Sinn annähert.

**Aufgabe U2** Gegeben sind die Messpunkte  $(x_1, y_1) = (-1, 3)$ ,  $(x_2, y_2) = (0, 3)$ ,  $(x_3, y_3) = (1, 2)$  und die Funktionen  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = x^2 - x$

Wir wollen den Punkt  $x_2$  mit einem Faktor von  $w_2 = 3$  gewichten. Die restlichen Punkte gewichten wir mit 1.

Berechne die Koeffizienten  $a_1$  und  $a_2$  der Funktion  $f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$ , die die Messpunkte am besten im Least Squares Sinn annähert.

**Aufgabe U3** Gegeben sind die Messpunkte  $(x_1, y_1) = (-1, -3)$ ,  $(x_2, y_2) = (0, -4)$ ,  $(x_3, y_3) = (1, 0)$  und die Funktionen  $f_1(x) = 1$ ,  $f_2(x) = x^2 - 2$

Wir wollen den Punkt  $x_2$  mit einem Faktor von  $w_2 = 2$  gewichten. Die restlichen Punkte gewichten wir mit 1.

Berechne die Koeffizienten  $a_1$  und  $a_2$  der Funktion  $f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$ , die die Messpunkte am besten im Least Squares Sinn annähert.

**Aufgabe U4** Gegeben sind die Messpunkte  $(x_1, y_1) = (-1, 1)$ ,  $(x_2, y_2) = (0, 3)$ ,  $(x_3, y_3) = (1, 2)$  und die Funktionen  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = x^2 + x - 1$

Wir wollen den Punkt  $x_2$  mit einem Faktor von  $w_2 = 2$  gewichten. Die restlichen Punkte gewichten wir mit 1.

Berechne die Koeffizienten  $a_1$  und  $a_2$  der Funktion  $f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$ , die die Messpunkte am besten im Least Squares Sinn annähert.

---

**Lösung U1** Die Matrix  $B$  ist:

$$B = \begin{pmatrix} -2.0 & 4.0 \\ -1.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix  $W$  ist:

$$W = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 2.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Wir können also  $B^t W^2 B$  berechnen:

$$B^t W^2 B = \begin{pmatrix} 8.0 & -12.0 \\ -12.0 & 20.0 \end{pmatrix}$$

Die Inverse von  $B^t W^2 B$  ist:

$$(B^t W^2 B)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5.0 & 3.0 \\ 3.0 & 2.0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist dann:

$$(B^t W^2 B)^{-1} B^t W^2 y = \begin{pmatrix} 0.5 & -2.0 & 0.0 \\ 0.5 & -1.0 & 0.0 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 7.5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

**Lösung U2** Die Matrix  $B$  ist:

$$B = \begin{pmatrix} -1.0 & 2.0 \\ 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix  $W$  ist:

$$W = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 3.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Wir können also  $B^t W^2 B$  berechnen:

$$B^t W^2 B = \begin{pmatrix} 2.0 & -2.0 \\ -2.0 & 4.0 \end{pmatrix}$$

Die Inverse von  $B^t W^2 B$  ist:

$$(B^t W^2 B)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist dann:

$$(B^t W^2 B)^{-1} B^t W^2 y = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.5 & 0.0 & 0.5 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 2.0 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

**Lösung U3** Die Matrix  $B$  ist:

$$B = \begin{pmatrix} 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & -2.0 \\ 1.0 & -1.0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix  $W$  ist:

$$W = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 2.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Wir können also  $B^t W^2 B$  berechnen:

$$B^t W^2 B = \begin{pmatrix} 6.0 & -10.0 \\ -10.0 & 18.0 \end{pmatrix}$$

Die Inverse von  $B^t W^2 B$  ist:

$$(B^t W^2 B)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9.0 & 5.0 \\ 5.0 & 3.0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist dann:

$$(B^t W^2 B)^{-1} B^t W^2 y = \begin{pmatrix} 1.0 & -1.0 & 1.0 \\ 0.5 & -1.0 & 0.5 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

**Lösung U4** Die Matrix  $B$  ist:

$$B = \begin{pmatrix} -1.0 & -1.0 \\ 0.0 & -1.0 \\ 1.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix  $W$  ist:

$$W = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 2.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Wir können also  $B^t W^2 B$  berechnen:

$$B^t W^2 B = \begin{pmatrix} 2.0 & 2.0 \\ 2.0 & 6.0 \end{pmatrix}$$

Die Inverse von  $B^t W^2 B$  ist:

$$(B^t W^2 B)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3.0 & -1.0 \\ -1.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist dann:

$$(B^t W^2 B)^{-1} B^t W^2 y = \begin{pmatrix} -0.5 & 1.0 & 0.5 \\ 0.0 & -1.0 & 0.0 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 3.5 \\ -3.0 \end{pmatrix}$$