

Zusatzblatt Least Squares Rechenaufgaben

Aufgaben T

Wir wollen Least Square Lösungen für bestimmte Funktionen berechnen. Wir orientieren uns hierbei an dem Algorithmus der Vorlesung. Link

Aufgabe T1 Gegeben sind die Messpunkte $(x_1, y_1) = (0, 1)$, $(x_2, y_2) = (1, -3)$, $(x_3, y_3) = (2, 3)$
und die Funktionen $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$

Berechne die Koeffizienten a_1 und a_2 der Funktion $f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$, die die Messpunkte am besten im Least Squares Sinn annähert.

Aufgabe T2 Gegeben sind die Messpunkte $(x_1, y_1) = (-2, -2)$, $(x_2, y_2) = (-1, -4)$, $(x_3, y_3) = (0, 0)$
und die Funktionen $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2 - x$

Berechne die Koeffizienten a_1 und a_2 der Funktion $f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$, die die Messpunkte am besten im Least Squares Sinn annähert.

Aufgabe T3 Gegeben sind die Messpunkte $(x_1, y_1) = (-1, -3)$, $(x_2, y_2) = (0, 2)$, $(x_3, y_3) = (1, 1)$
und die Funktionen $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x^2 - 2$

Berechne die Koeffizienten a_1 und a_2 der Funktion $f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$, die die Messpunkte am besten im Least Squares Sinn annähert.

Aufgabe T4 Gegeben sind die Messpunkte $(x_1, y_1) = (-1, -3)$, $(x_2, y_2) = (0, -2)$, $(x_3, y_3) = (1, 0)$
und die Funktionen $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2 + x - 1$

Berechne die Koeffizienten a_1 und a_2 der Funktion $f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$, die die Messpunkte am besten im Least Squares Sinn annähert.

Lösung T1 Die Matrix B ist:

$$B = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 1.0 \\ 2.0 & 4.0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix W ist:

$$W = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Wir können also $B^t W^2 B$ berechnen:

$$B^t W^2 B = \begin{pmatrix} 5.0 & 9.0 \\ 9.0 & 17.0 \end{pmatrix}$$

Die Inverse von $B^t W^2 B$ ist:

$$(B^t W^2 B)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 17.0 & -9.0 \\ -9.0 & 5.0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist dann:

$$(B^t W^2 B)^{-1} B^t W^2 y = \begin{pmatrix} 0.0 & 2.0 & -0.5 \\ 0.0 & -1.0 & 0.5 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} -7.5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

Lösung T2 Die Matrix B ist:

$$B = \begin{pmatrix} -2.0 & 6.0 \\ -1.0 & 2.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix W ist:

$$W = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Wir können also $B^t W^2 B$ berechnen:

$$B^t W^2 B = \begin{pmatrix} 5.0 & -14.0 \\ -14.0 & 40.0 \end{pmatrix}$$

Die Inverse von $B^t W^2 B$ ist:

$$(B^t W^2 B)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 40.0 & 14.0 \\ 14.0 & 5.0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist dann:

$$(B^t W^2 B)^{-1} B^t W^2 y = \begin{pmatrix} 1.0 & -3.0 & 0.0 \\ 0.5 & -1.0 & 0.0 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 10.0 \\ 3.0 \end{pmatrix}$$

Lösung T3 Die Matrix B ist:

$$B = \begin{pmatrix} 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & -2.0 \\ 1.0 & -1.0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix W ist:

$$W = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Wir können also $B^t W^2 B$ berechnen:

$$B^t W^2 B = \begin{pmatrix} 3.0 & -4.0 \\ -4.0 & 6.0 \end{pmatrix}$$

Die Inverse von $B^t W^2 B$ ist:

$$(B^t W^2 B)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6.0 & 4.0 \\ 4.0 & 3.0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist dann:

$$(B^t W^2 B)^{-1} B^t W^2 y = \begin{pmatrix} 1.0 & -1.0 & 1.0 \\ 0.5 & -1.0 & 0.5 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} -4.0 \\ -3.0 \end{pmatrix}$$

Lösung T4 Die Matrix B ist:

$$B = \begin{pmatrix} -1.0 & -1.0 \\ 0.0 & -1.0 \\ 1.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix W ist:

$$W = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Wir können also $B^t W^2 B$ berechnen:

$$B^t W^2 B = \begin{pmatrix} 2.0 & 2.0 \\ 2.0 & 3.0 \end{pmatrix}$$

Die Inverse von $B^t W^2 B$ ist:

$$(B^t W^2 B)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3.0 & -2.0 \\ -2.0 & 2.0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist dann:

$$(B^t W^2 B)^{-1} B^t W^2 y = \begin{pmatrix} -0.5 & 1.0 & 0.5 \\ 0.0 & -1.0 & 0.0 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 2.0 \end{pmatrix}$$