Zusatzblatt Fourierrechnung

Sei $\mathfrak{F}(f)(\omega)$ die Fouriertransformation einer Funktion f ausgewertet an der Stelle ω.

Es gilt:

$$\mathfrak{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\omega}dx$$

Und für die Inverse Fouriertransformation gilt:

$$\mathfrak{F}^{-1}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi i x\omega}dx$$

1. Finde eine Funktion mit $\mathfrak{F}(f)(0) = \frac{1}{2}$
2. Berechne $\mathfrak{F}(\frac{1}{(|x|+1)^2})(0)$
3. Zeige: $\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(f))(\omega) = f(-\omega)$
4. Zeige: $\mathfrak{F}(f)(\omega) = conj(\mathfrak{F}(f)(-\omega))$ wobei $conj(x)$ das komplex konjugierte von x beschreibt
5. Zeige: $\mathfrak{F}(\frac{e^{-x^2}}{cos(2\pi x)})(-1) + \mathfrak{F}(\frac{e^{-x^2}}{cos(2\pi x)})(1) = 2\sqrt{\pi}$
   (Das Integral von e^{-x^2} ist $\sqrt{\pi}$)
6. Zeige: Ist $f(x) = f(-x)$, so ist der imaginär Teil von $\mathfrak{F}(f)(\omega)$ immer 0.
   (I.e. ist f symmetrisch, so ist die Fouriertransformation real)
7. Zeige: Ist $f(x) = -f(-x)$, so ist $\mathfrak{F}(f)(\omega) = -\mathfrak{F}(f)(-\omega)$
   (I.e. ist f antisymmetrisch, so ist die Fouriertransformation das auch)