# Zusatzblatt Diagonalisierung und Eigenwerte

**Rechenaufgaben (Lösungen weiter unten!)**

**Aufgaben R (2x2 Matrizen)**

Hat eine matrix $A$ linear unabhängige Eigenvektoren, so können wir $A$ durch $A = UDU^{-1}$ diagonalisieren, wobei

$D$ eine Diagonalmatrix aus Eigenwerten ist
und
$U$ eine Matrix ist deren Spalten die Eigenvektoren enthalten.

Berechne $U$ und $D$ (und $U^{-1}$) für die folgenden Matrizen:

**Aufgabe R1**

$$A = \begin{pmatrix} -1.0 & 4.0 \\ 0.0 & 3.0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe R2**

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1.0 & -1.0 \\ -3.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe R3**

$$A = \begin{pmatrix} 5.0 & 4.0 \\ -2.0 & -1.0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe R4**

$$A = \begin{pmatrix} 4.0 & 4.0 \\ -4.0 & -6.0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe R5**

$$A = \begin{pmatrix} -4.0 & 3.0 \\ -6.0 & 5.0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe R6**

$$A = \begin{pmatrix} 10.0 & -14.0 \\ 7.0 & -11.0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe R7**

$$A = \begin{pmatrix} 7.0 & 9.0 \\ -6.0 & -8.0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe R8**

$$A = \begin{pmatrix} -7.0 & -3.0 \\ 4.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

**Aufgaben S (3x3 Matrizen)**

Hat eine matrix $A$ linear unabhängige Eigenvektoren, so können wir $A$ durch $A = UDU^{-1}$ diagonalisieren, wobei

$D$ eine Diagonalmatrix aus Eigenwerten ist
und
$U$ eine Matrix ist deren Spalten die Eigenvektoren enthalten.

Berechne $U$ und $D$ (und $U^{-1}$) für die folgenden Matrizen:

**Aufgabe S1**

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -10.0 & 0.0 & 4.0 \\ -2.0 & 8.0 & 36.0 \\ 1.0 & 0.0 & -10.0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe S2**

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -2.0 & 9.0 \\ 0.0 & 4.0 & -2.0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe S3**

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4.0 & -5.0 & 0.0 \\ 0.0 & -6.0 & 0.0 \\ -18.0 & 13.0 & -2.0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe S4**

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0.0 & -2.0 & 4.0 \\ -6.0 & -4.0 & -12.0 \\ 1.0 & 1.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe S5**

$$A = \begin{pmatrix} -3.0 & -2.0 & -2.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & -6.0 & -1.0 \end{pmatrix}$$

---

**Lösungen R**

Bedenkt, dass die Lösungen nicht eindeutig sind. Die hier gezeigten Lösungen sind nur eine Variante.

**Lösung R1** Das charakteristische polynom ist $1.0\lambda^2 - 2.0\lambda - 3.0$

Die Eigenwerte sind $-1, 3$

Die Zerlegung in $UDU^{-1}$ ist dann:

$$A = \begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1.0 & -1.0 \\ 0.0 & 2.0 \end{pmatrix}$$

**Lösung R2** Das charakteristische polynom ist $1.0\lambda^2 - 1.0$

Die Eigenwerte sind $1, -1$

Die Zerlegung in $UDU^{-1}$ ist dann:

$$A = \begin{pmatrix} -1.0 & -2.0 \\ 3.0 & -2.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1.0 & 1.0 \\ -2.0 & -0.0 \end{pmatrix}$$

**Lösung R3** Das charakteristische polynom ist $1.0\lambda^2 - 4.0\lambda + 3.0$

Die Eigenwerte sind $3, 1$

Die Zerlegung in $UDU^{-1}$ ist dann:

$$A = \begin{pmatrix} 2.0 & 3.0 \\ -1.0 & -3.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3.0 & 3.0 \\ -1.0 & -2.0 \end{pmatrix}$$

**Lösung R4** Das charakteristische polynom ist $1.0\lambda^2 + 2.0\lambda - 8.0$

Die Eigenwerte sind $2, -4$

Die Zerlegung in $UDU^{-1}$ ist dann:

$$A = \begin{pmatrix} 2.0 & -1.0 \\ -1.0 & 2.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 \end{pmatrix}$$

**Lösung R5** Das charakteristische polynom ist $1.0\lambda^2 - 1.0\lambda - 2.0$

Die Eigenwerte sind $2, -1$

Die Zerlegung in $UDU^{-1}$ ist dann:

$$A = \begin{pmatrix} -1.0 & 1.0 \\ -2.0 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0 & -1.0 \\ 2.0 & -1.0 \end{pmatrix}$$

**Lösung R6** Das charakteristische polynom ist $1.0\lambda^2 + 1.0\lambda - 12.0$

Die Eigenwerte sind $-4, 3$

Die Zerlegung in $UDU^{-1}$ ist dann:

$$A = \begin{pmatrix} -1.0 & -4.0 \\ -1.0 & -2.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2.0 & -4.0 \\ -1.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

**Lösung R7** Das charakteristische polynom ist $1.0\lambda^2 + 1.0\lambda - 2.0$

Die Eigenwerte sind $-2, 1$

Die Zerlegung in $UDU^{-1}$ ist dann:

$$A = \begin{pmatrix} 3.0 & -3.0 \\ -3.0 & 2.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2.0 & -3.0 \\ -3.0 & -3.0 \end{pmatrix}$$

**Lösung R8** Das charakteristische polynom ist $1.0\lambda^2 + 7.0\lambda + 12.0$

Die Eigenwerte sind $-4, -3$

Die Zerlegung in $UDU^{-1}$ ist dann:

$$A = \begin{pmatrix} 2.0 & 3.0 \\ -2.0 & -4.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4.0 & 3.0 \\ -2.0 & -2.0 \end{pmatrix}$$

**Lösung S**

Bedenkt, dass die Lösungen nicht eindeutig sind. Die hier gezeigten Lösungen sind nur eine Variante.

**Lösung S1** Das charakteristische polynom ist $1.0\lambda^3 + 3.0\lambda^2 - 4.0\lambda - 12.0$

Die Eigenwerte sind $2, -3, -2$

Die Zerlegung in $UDU^{-1}$ ist dann:

$$A = \begin{pmatrix} 0.0 & -2.0 & 2.0 \\ -3.0 & -2.0 & -2.0 \\ 0.0 & 1.0 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -0.0 & -1.0 & -3.0 \\ -1.0 & -0.0 & 2.0 \\ 1.0 & 0.0 & 2.0 \end{pmatrix}$$

**Lösung S2** Das charakteristische polynom ist $1.0\lambda^3 - 1.0\lambda^2 - 4.0\lambda + 4.0$

Die Eigenwerte sind $2, -2, 1$

Die Zerlegung in $UDU^{-1}$ ist dann:

$$A = \begin{pmatrix} -2.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -3.0 & -3.0 \\ 0.0 & 2.0 & -2.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2.0 & -0.0 & -0.0 \\ -0.0 & -1.0 & 1.0 \\ -0.0 & -1.0 & -1.0 \end{pmatrix}$$

**Lösung S3** Das charakteristische polynom ist $1.0\lambda^3 + 2.0\lambda^2 - 5.0\lambda - 6.0$

Die Eigenwerte sind $-1, 2, -3$

Die Zerlegung in $UDU^{-1}$ ist dann:

$$A = \begin{pmatrix} 0.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 2.0 \\ -3.0 & -3.0 & -2.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4.0 & 1.0 & -1.0 \\ 4.0 & -2.0 & 0.0 \\ 0.0 & 2.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

**Lösung S4** Das charakteristische polynom ist $1.0\lambda^3 + 2.0\lambda^2 - 1.0\lambda - 2.0$

Die Eigenwerte sind $1, -1, -2$

Die Zerlegung in $UDU^{-1}$ ist dann:

$$A = \begin{pmatrix} -2.0 & 2.0 & -2.0 \\ 2.0 & 0.0 & -2.0 \\ 0.0 & -1.0 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1.0 & -0.0 & -2.0 \\ -1.0 & -1.0 & -4.0 \\ -1.0 & -1.0 & -2.0 \end{pmatrix}$$

**Lösung S5** Das charakteristische polynom ist $1.0\lambda^3 + 3.0\lambda^2 - 1.0\lambda - 3.0$

Die Eigenwerte sind $1, -1, -3$

Die Zerlegung in $UDU^{-1}$ ist dann:

$$A = \begin{pmatrix} 1.0 & 2.0 & -2.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -3.0 & -2.0 & 0.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -0.0 & 2.0 & -0.0 \\ 0.0 & -3.0 & -1.0 \\ -1.0 & -2.0 & -1.0 \end{pmatrix}$$