Modellierung WS 22-23 Blatt 3

Abgabe: 25.11.22 23:59 auf Mattermost oder per Mail an jadissel

Aufgabe 1:

Wir betrachten in dieser Aufgabe Polynome von beliebigem Grad. Wir haben also eine Funktion

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

Sei nun $f''(x) = -f(x)$. Wir wollen Lösungen dieser Gleichung finden.

1. Sei $a_0 = 1$ und $a_1 = 0$. Gib eine Formel für a_n an. Wie sieht f hier aus?
2. Sei $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$. Gib eine Formel für a_n an. Wie sieht f hier aus?
3. Begründe dass die Menge der Lösungen für $f''(x) = -f(x)$ einen 2 Dimensionalen Vektorraum bildet, und dass die Lösungen aus 1. und 2. eine Basis für diesen bilden.

Wir wollen nun verstehen warum $sin(x) \approx x$ für kleine x

4. Berechne eine Taylor approximation für sin um den Nullpunkt. Tip $sin'' = -sin$, wir können also evtl Aufgabe 1 nutzen?
5. Berechne $sin(0.1)$ grob indem du ein paar Terme der approximation auswertest. Wie groß ist der Fehler ungefähr?
6. Begründe dass $sin(x) \approx x$ für kleine x

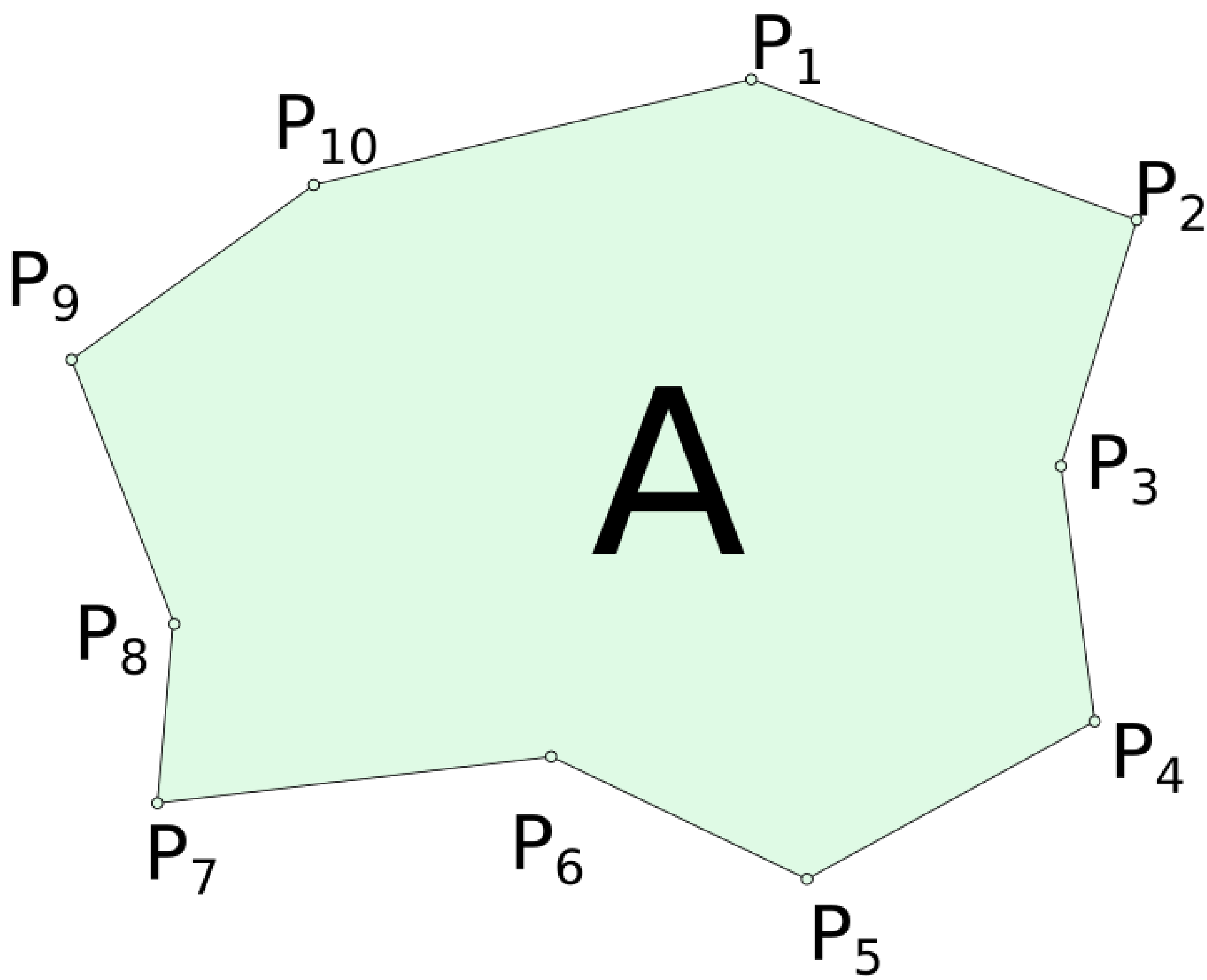
Aufgabe 2:

Wir wollen die sogenannte "Shoelace" Formel herleiten. Seien $P_1, P_2, \ldots, P_n$ die Eckpunkte eines sternförmigen Polygons (die Formel gilt allgemein, ist aber sehr viel offensichtlicher für sternförmige Polygone). Sei A die Fläche des Polygons.

Zeige:

$$2A = det(P_1, P_2) + det(P_2, P_3) + \ldots + det(P_n, P_1)$$

wobei $det(P_i, P_j)$ die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} P_{i,x} & P_{j,x} \\ P_{i,y} & P_{j,y} \end{pmatrix}$ ist.



Vorgeschlagene Reihenfolge des Beweises:

1. Zeige dass $det(P_1, P_2) + det(P_2, P_3) + \ldots + det(P_n, P_1)$ sich nicht verändert, wenn alle Punkte um den selben Vektor verschoben werden.
2. Zeige dass $det(P_i, P_j)$ der Fläche des Parallelogramms entspricht, das durch P_i und P_j aufgespannt wird.
3. Folgere die Formel aus 1. und 2.

Bonus: Zeige die Aussage für beliebige Polygone (nicht nur sternförmige)

Aufgabe 3:

Wir wollen verschiedenen Varianten testen um Integrale anzunähern. Insbesondere wollen wir uns die "einfache" approximation durch Rechtecke, die Trapezoid Regel und Quadratische approximation (Simpsons Regel) anschauen.

Für den Programmierteil steht euch wieder online ein Skript Template zur Verfügung.

1. Approximiere das Integral einer gegebenen Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ mit n Stützstellen durch **Rechtecke**
2. Approximiere das Integral einer gegebenen Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ mit n Stützstellen durch **Trapeze**
3. Approximiere das Integral einer gegebenen Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ mit n Stützstellen durch **Quadratische Funktionen**. Die Formel für einen einzelnen Bereich findest du z.b. hier. Approximationen dieser Art werden oft **Simpson Regeln** genannt
4. (Theorie Bonus) Leite die Simpson Formel für Quadratische Funktionen und gleichmäßigen Stützstellen selbst her

Das Ergebnis sollte grob folgendermaßen aussehen: